

TD 5 : Trigonométrie Indications

Identités trigonométriques

1 ★★

1) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

2) En utilisant le fait que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$, puis calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

- 1) Utiliser les formules $\cos(a - b)$ avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$
- 2) Utiliser les formules de $\tan(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, etc.

2 ★★

1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est solution de l'équation suivante : $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

3) On pose $f : x \mapsto \cos^3 x$. Quelle est la dérivée 4-ième de f ?

$3\theta = \dots + \dots$, deux valeurs dont on pourra exprimer facilement le cosinus...

(In)équations trigonométriques

3 ★★ Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ 5) $\tan x = \tan(2x)$

3) $2\cos^2 x + \cos(2x) = 2$ 6) $\sin x = \tan x$

Exploiter des formules de trigonométrie pour se retrouver avec une équation qu'on sait résoudre.

4 ★★★ Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$

3) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Utiliser la méthode vue en cours !

Pour la 3), résoudre les deux inégalités séparément et obtenir des ensembles de solutions \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de cette manière. Que vaut l'ensemble des solutions \mathcal{S} en fonction de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_2 ?

5 ★★★ Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} .

On pourra faire apparaître une formule du type " $\cos(a + b)$ " avec a et b bien choisis.

1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

2) $\cos x - \sin x = 1$

3) $\sqrt{3}(1 + \sin x) = \cos x$

4) $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réécrire l'expression pour faire apparaître une expression d'une formule d'addition, par exemple $\cos a \cos b \pm \sin a \sin b$